Concours commun INA-ENSA **MATHÉMATIQUES** PREMIÈRE COMPOSITION (Option générale)

Durée : 3 heures

Le problème a pour objet l'étude de l'équation différentielle (E) $xy' + y = \frac{1}{1+x^2}$.

Dans la partie I, on étudie et on construit dans un repère orthonormé d'axes Ox, Oy les courbes intégrales de (E).

Dans la partie II, on étudie une primitive de l'une des solutions de (E).

PARTIE I

Étude des courbes intégrales de (E).

1. Intégrer l'équation différentielle (E) sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

2. Soit λ un nombre réel. On appelle ℓ_λ la fonction définie pour x non nul par :

$\ell_\lambda(x) = \frac{\lambda + \arctan x}{x}$ et (C_λ) la courbe d'équation $y = \ell_\lambda(x)$.

2.a. Montrer que, par tout point d'abscisse non nulle du plan, il passe une et une seule courbe intégrale.

2.b. Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points P du plan tels que la courbe intégrale passant par P ait, en P, une tangente de pente nulle.

2.c. On considère un point M d'abscisse non nulle, n'appartenant pas à (Γ). Déterminer, selon sa position par rapport à (Γ) et à l'axe Oy, le signe de la pente de la tangente en M à la courbe intégrale passant par ce point.

3.a. Montrer que ℓ_0 admet en 0 une limite finie ℓ, qu'on déterminera. On pose désormais $\ell_0(0) = \ell$.

3.b. Montrer que les courbes (C_λ) et $(C_{-\lambda})$ se correspondent dans une transformation géométrique simple. Que peut-on dire de (C_0)?

4.a. Calculer $\ell'_\lambda(x)$. On pose $\ell'_\lambda(x) = \frac{1}{x^2} q_\lambda(x)$. Etudier les variations de la fonction q_λ ainsi définie. En déduire, selon les valeurs de λ, le signe de $\ell'_\lambda(x)$ en fonction de x.

4.b. On suppose $\lambda \geq 0$. Dresser le tableau de variations de ℓ_λ dans chacun des cas possibles.

5.a. Soit $\lambda_1 < \lambda_2$. Quelle est la position de (C_{λ_2}) par rapport à (C_{λ_1})?

5.b. Tracer, dans un même repère, la courbe (Γ) et les courbes (C_0), $(C_{\pi/4})$, $(C_{\pi/2})$.

6.a. Déterminer et représenter l'ensemble (Λ) des points Q de coordonnées (a,b) du plan tels que la courbe intégrale d'équation $y = \ell(x)$ passant par Q soit telle que $\ell''(a)=0$.

6.b. On considère un point M d'abscisse non nulle a n'appartenant pas à (Λ). Déterminer, selon sa position par rapport à (Λ) et à l'axe Oy, le signe de $\ell''(x)$ où $y = \ell(x)$ est l'équation de la courbe intégrale passant par ce point M.

PARTIE II

Étude d'une primitive de ℓ_0.

1. Déterminer les coefficients a_n ($n \in \mathbb{N}$) d'une série entière de terme général $a_n x^n$ dont la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une solution de (E). Quel est le rayon de convergence R de cette série? Exprimer sa somme à l'aide des fonctions usuelles.

2. On pose $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \ell_0(x)\, dx$ pour α réel.

2.a. Montrer que la fonction F, ainsi définie sur $\mathbb{R}$, est impaire et qu'elle est dérivable. Calculer $F'(\alpha)$.

2.b. Pour quelles valeurs de α, F est-elle développable en série entière. Exprimer alors $F(\alpha)$ à l'aide d'une série entière.

2.c. Déterminer une expression de $F(\frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} \ell_0(x)\, dx$ comme somme d'une série numérique.

Donner une valeur approchée de cette somme à 5×10^{-4} près en justifiant l'approximation.

2.d. Pour quelle valeur de λ, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \ell_\lambda(x)\, dx$ a-t-elle un sens?

Comparer l'intégrale obtenue pour cette valeur à $\int_0^{1/2} \ell_0(x)\, dx$.

2.e. Etudier la limite de $F(\alpha)$ en $+\infty$. Montrer que $\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{F(\alpha)}{\alpha} = 0$.

2.f. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(1)$. On pourra utiliser sans démonstration la formule :

$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

et admettre que $$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)^2} .$$

2.g. A l'aide des résultats précédents, tracer soigneusement la courbe représentative de la fonction F. On précisera les tangentes aux points d'abscisses 0, $\frac{1}{2}$, et 1.